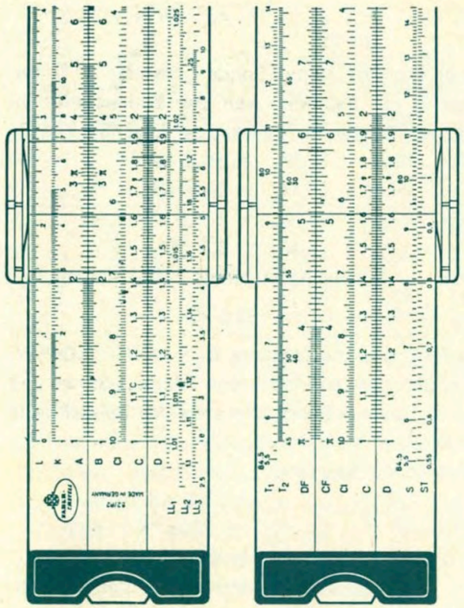


CASTELL SCHUL-D-STAB 52/82

jetzt mit d r e i Exponentialskalen

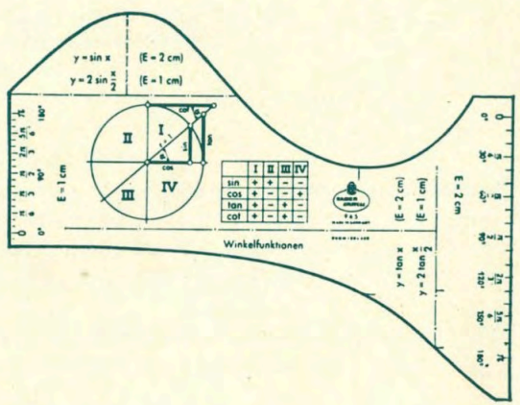
Zu den bisherigen Exponentialskalen LL_2 und LL_3 des bewährten CASTELL Schul-D-Stabes 52/82 hat sich nun die LL_1-Skala ($e^{0,01x}$) gesellt. Die Aufnahme dieser d r i t t e n Exponentialskala stellt eine bedeutsame Verbesserung des Rechenstabes 52/82 dar, da sich sein Gebrauchsumfang hierdurch erheblich erweitert, namentlich für Zinseszins- und Rentenrechnungen.

Der CASTELL Schul-D-Stab wird somit umfassenden Ansprüchen gerecht, wie sie im Unterricht an Höheren Lehranstalten und Fachschulen an einen modernen Rechenstab gestellt werden.

Er vereint die Exponentialskalen LL_1, LL_2, LL_3, die π-versetzten Skalen CF, DF, die Skalen des Systems Rietz und die 2. Tangensskala T_2 über 45^0. Die Hauptskalen auf Vorder- und Rückseite sind mit einem augenschonenden hellgrünen Farbstreifen unterlegt und treten dadurch stärker hervor. Läufer und Zunge können ungehindert bewegt werden, wenn der Stab auf der Tischplatte liegt. Jeder Stab wird in einem stabilen, durchsichtigen Plastiketui geliefert und ist mit einer ausführlichen Anleitung versehen.

Sinus-Tangens-Schablone 945

Diese Zeichenschablone aus grünem, durchsichtigem Zelluloid dient dem mathematischen Zeichnen an Höheren Schulen und Fachschulen. Sie ist ein Spezialgerät zum Zeichnen von Kurven der Kreisfunktionen und enthält neben den Maßstäben für die Abszissenteilung in Grad und Bogenmaß auch ein Schema über den Funktionsverlauf.



Sinus-Tangens-Schablone 945 D: Unter dieser Nummer ist die Sinus-Tangens-Schablone als **Wandtafelgerät** lieferbar.

FABER-CASTELL

8

1964

Rechenstab-Brief

Berichte und Anregungen für das Stabrechnen

Aus dem Inhalt

Verantwortliche Schriftleitung:

Dr. Peter Pirchan
Ing. Harald Bachmann

Hinweis:

Der Castell-Rechenstab-Brief wird kostenlos an Interessenten verschickt.
Weitere Druckschriften können angefordert werden.

Eine Einführung in das Stabrechnen in der Untersekunda

von Studienrat Helmut Rixecker

Der Rechenstab hat in der höheren Schule ein festes Heimatrecht erworben. Es ist anzunehmen, daß in den kommenden Jahren unter den Schulmathematikern sich immer mehr die Ansicht durchsetzt, der Rechenstab müsse schon in der Quarta eingeführt werden. Selbstverständlich sieht eine Einführung in das Stabrechnen in der Quarta ganz anders aus als in der Untersekunda. Im Folgenden soll eine Einführung in das Stabrechnen in der Untersekunda geschildert werden, die auch dann sinnvoll bleibt, wenn schon vorher mit dem Stab gerechnet wurde. Fast alle Lehrbücher schildern das Stabrechnen in der Untersekunda nach der Behandlung des logarithmischen Tafelrechnens. Der umgekehrte Weg erscheint mir besser. Die Eigenschaften der Logarithmen werden viel sinnfälliger, wenn sie zuerst am Stab erarbeitet und dann erst mit Tabellenwerten behandelt werden.

Für den Lehrer erhebt sich die Frage, welchen Stab die Schüler benutzen sollen. Die erste Antwort darauf ist die: Alle denselben Stab! Dieser Stab sollte auch als Wandmodell vorhanden sein. Bei der Auswahl des Stabes spielen nicht nur Erwägungen des Schulunterrichts eine Rolle. Ein Rechenstab soll den Schüler zunächst einmal in der Schule, dann auch im Studium und vielleicht auch im ganzen Leben begleiten. Er soll ein sinnvolles Mittelmaß an Einfachheit und Vielfältigkeit bieten. Die Alltagsforderungen verlangen versetzte Skalen, Quadrat- und Reziprokskalen. Der Schulunterricht erfordert drei Exponentialskalen, Winkelfunktionen und Tangensteilungen für tan 0,1 x und tan x, sowie arc x-Teilung für kleine Argumente. Die Behandlung der sphärischen Trigonometrie wird leider immer seltener in unseren Gymnasien, so daß eine zweite Sinusskala auf der Zunge vielleicht entbehrt werden kann. Die Auswahl des Stabes richtet sich nach dem Angebot der Herstellerfirmen und kann daher nur zeitbedingt richtig getroffen werden. Mir scheint, daß das heutige Angebot den Schulmathematiker am ehesten zum **CASTELL-Schul - D - Stab 52/82** greifen lassen wird. Der Preis ist erschwinglich und die Teilungen sind übersichtlich.

Das logarithmische Rechnen mit Stab und Tafel schließt sich an die Behandlung der Potenzlehre an; es gehört zur Potenzlehre. Potenzen mit natürlichen, ganzen und rationalen Exponenten werden zuerst behandelt. An Exponentialgleichungen der Form $2^x = 1024$, $5^x = 625$, die ohne viel Erläuterungen gestellt und gelöst werden, schließt sich ebenso harmlos die Aufgabe $10^x = 3$ an. Nach einigem Raten finden die Schüler, daß x bei diesem letztgenannten Beispiel zwischen 0 und 1 liegt. Die Frage nach der Existenz stellt der Schüler vorerst noch nicht. Zwanglos erhebt sich im genannten Beispiel die Frage, ob x vielleicht in der Mitte zwischen 0 und 1 liegt. Die Probe lautet $10^{\frac{1}{2}} \approx 3$. Quadrieren zeigt, daß $10 > 3^2$ ist. Die Monotonie der Exponentialfunktion ist den Schülern naiv so selbstverständlich, daß sie schließen: $^1/_2$ ist zu groß, also liegt x zwischen 0 und $^1/_2$.

Das Mittelbilden ist jetzt so nahegelegt, daß probiert wird $10^{1/4} \approx 3$. Potenzieren der vorigen Ungleichung liefert $10 < 3^4 = 81$, also ist $^1/_4$ zu klein, x liegt also zwischen $^1/_4$ und $^1/_2$. Neuer Näherungswert ist das Mittel $^3/_8$. Die weitere Rechnung wird jetzt verkürzt geschrieben.

$10^{3/8} \approx 3, \quad 10^3 < 3^8 = 81^2 = 6561, \quad \text{also } 3/8 < x < 1/2$

$10^{7/16} \approx 3, \quad 10^7 < 3^{16} = 6561^2 = 43{,}046 \cdot 10^6 \quad \text{also } 7/16 < x < 1/2$

$10^{15/32} \approx 3, \quad 10^{15} < 3^{32} = 1{,}85 \cdot 10^{15} \quad \text{also } 15/32 < x < 1/2$

$10^{31/64} \approx 3, \quad 10^{31} < 3^{64} = 1{,}85^2 \cdot 10^{30} \quad \text{also } 30/64 < x < 31/64$

Mit dem Mittel aus beiden Schranken begnügen wir uns, es ist $x = 61/128$ (Fehler $< 1/128$). Auf zwei Dezimalen genau ist also $x = 0{,}48$. Es gilt demnach genähert $10^{0,48} = 3$. Als Hausaufgabe wird in getrennten Gruppen analog gelöst $10^x = 2$, $10^x = 5$, $10^x = 7$. Stellt man in der nächsten Stunde die Aufgabe, $10^x = 6$ zu lösen, dann werden die Schüler erkennen, daß wegen $6 = 2 \cdot 3$ nur die Exponenten für 2 und 3 addiert werden müssen. Die Frage eines Schülers nach der genauen Lösung unserer Exponentialgleichungen führt auf die Frage nach der Existenz der Lösungen. Aus dem Rechengang läßt sich erkennen, daß die Lösungen nicht rational sein können, denn die Gleichung $10^{a/b} = 3$ führt zu $10^a = 3^b$, was für natürliche a und b gegen die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung verstößt. Wir stellen fest, daß unsere Exponentialgleichungen irrationale Lösungen besitzen, die wir beliebig genau rational annähern können.

Mit den errechneten Näherungswerten werden Punkte der Kurve $y = 10^x$ gezeichnet. Wir benutzen ein Blatt Millimeterpapier im Format DIN A 4. Um die Breite des Blattes auszunutzen, wird die Einheit auf der x-Achse zu 25 cm (!) gewählt, die Einheit auf der y-Achse ist 1 cm. Auf der x-Achse werden die Hundertstel in 2,5 mm Abstand markiert, die Zehntel werden angeschrieben. Die Kurve läßt sich dann mit einiger Sorgfalt recht genau zeichnen. Anhand der Kurve werden Näherungswerte für y bei gegebenem x und umgekehrt abgelesen. Das häufige Anlegen des Lineals oder das Entlanggehen mit dem Finger ist mühsam und fehlerträchtig. Dies bringt den Vorschlag, die ganz- und halbzahligen y-Werte über der x-Skala zu markieren. Ein paar Ableseübungen machen mit den beiden Skalen vertraut.

Einige Schüler haben schon gemerkt, daß beide Skalen sich auf ihrem Rechenstab wiederfinden. Unsere x-Skala ist die Skala L des Stabes und unsere auf die x-Achse projizierte y-Skala ist die Skala C auf der Zunge. Durch Anlegen dieser Skalen an die Zeichnung wird nachträglich deren Genauigkeit überprüft.

Es werden weitere Ableseübungen angestellt, nun aber ausschließlich am Stab mittels des Läufers. Es folgen Multiplikations- und Divisionsübungen mit Ergebnissen zwischen 1 und 10. Etwa so: $2{,}31 \cdot 4{,}15 = 10^{0,364} \cdot 10^{0,618} = 10^{0,982} = 9{,}58$.

Das Ablesen auf den Skalen wird geübt durch Aufgaben, deren Schwierigkeitsgrad sich ständig steigert. Langatmige Bemerkungen über die Skalenteilung verwirren mehr als sie nutzen. Umfangreiche Übungen, auch mit Überschreiten der Einer- und Zehnergrenze, machen mit den Skalen D und L vertraut.

Ich sage den Schülern, daß der Engländer Edmund Gunter im Jahre 1620 den ersten Rechenstab geschaffen hat. Auf diesem Stab wurde mit einem Stechzirkel multipliziert und dividiert. Gute Schüler finden sofort, wie das zu machen ist. Zur Schonung unseres Stabes wollen wir das nicht ausprobieren, wir brauchen es auch nicht. Die 1621 von William Oughtred erfundenen verschiebbaren Skalen finden wir in dem Skalenpaar C und D wieder, sie ersetzen das Streckenabtragen durch Verschieben. Damit ist der Zugang zum Rechnen mit dem Stab eröffnet.

Sogleich gehen wir über zur Benutzung der Skalen C und D, die mit den versetzten Skalen CF und DF gekoppelt sind. Etwa die Aufgabe $3 \cdot 4 = 12$, gerechnet auf C und D, gestattet es, das Ergebnis auf DF abzulesen. Als Faustregel ergibt sich: Wähle bei Multiplikationen und Divisionen unter den Skalenpaaren C, D und CF, DF stets so, daß die Zunge möglichst wenig herausgezogen wird.

Der Zungenrückschlag soll von vorne herein nach Möglichkeit vermieden werden. Ich erreiche dies, indem ich ihn bis jetzt überhaupt noch nicht erwähnt habe. Die Wahl zwischen den beiden versetzten Skalenpaaren macht den Schülern zunächst Schwierigkeiten. Diese Mühen machen sich dadurch bezahlt, daß die Schüler von Anfang an an die bequemen versetzten Skalen gewöhnt werden. Erfahrungsgemäß macht die Kommasetzung den Schülern häufig Schwierigkeiten, man muß sie dazu anhalten, möglichst grob zu überschlagen.

Es schließen sich Übungen im Ablesen von Zahlenpaaren der Funktion $y = kx$ an, die auf die sogenannte „Goldene Regel des Stabrechnens" führen. Die Reziprokskala wird herangezogen, um Zahlenpaare der Funktion $y = k/x$ oder $xy = k$ zu berechnen. In Analogie zu den Aufgaben $\frac{ab}{c} = (a : c) \cdot b$ verwendet man die Reziprokskalen bei $abc = (a : \frac{1}{b}) \cdot c$. Seltsamerweise fällt den Schülern die Benutzung der Reziprokskala schwer. Ich meine, daß man mit aller Eindringlichkeit immer wieder darauf hinweisen sollte, daß man jede Multiplikation durch eine Division mit dem Kehrwert und jede Division durch Multiplikation mit dem Kehrwert ersetzen kann. An der Benutzung der Reziprokskala erkennt man den geschickten Rechner!

Umfangreiche Übungen im Unterricht und in den häuslichen Aufgaben **müssen** folgen. Dann kann man sich den anderen Skalen zuwenden. Beim Rechnen mit den Quadratskalen ergibt sich erstmalig die Notwendigkeit des Zungenrückschlags. Beim Ziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln muß man auf die richtige Einstellung hinweisen. Die Exponentialskalen machen den Schülern viel Freude. Durch Beispiele muß man auf die Kommatreue dieser Skalen und den Skalenwechsel beim Zungenrückschlag hinweisen. Die trigonometrischen Skalen wird man erst bei der Behandlung der Trigonometrie erläutern. Auch hier benutzt man zuerst den Stab und dann die Tafel.

Der geschilderte Lehrgang ist mehrfach im Unterricht erprobt worden und hat sich bewährt.

Die Verwendung des Rechenstabes bei der Herstellung vom Nomogrammen

von Prof. Dr. W. Neß

Bei Routineaufgaben, die in der Praxis mit nur wenig veränderten Zahlen immer wiederkehren, lohnt meist die Herstellung eines Nomogramms. Dies soll an einigen Beispielen erläutert und zugleich gezeigt werden, wie dabei der Rechenstab mit Vorteil zu verwenden ist.

1. Die einfache Multiplikation.

Grundlage ist der elementargeometrische Satz, daß die Mittellinie eines Trapezes gleich der halben Summe der Grundlinien ist. In Bild 1 sind drei parallele Strahlen in gleichem Abstand gezeichnet. Die Anfangspunkte P_1, P_2, P_3 liegen auf einer Geraden. Ein gespannter Faden (besser eine auf einem Streifen Plexiglas gezeichnete Gerade) schneide in beliebiger Lage auf den Strahlen die Strecken a, b, c ab. Nach dem soeben erwähnten Satz ist $c = \frac{a+b}{2}$. Werden die Strahlen mit Hilfe eines gewöhnlichen Lineals von den Anfangspunkten aus beziffert, so hat man ein Verfahren, zu zwei Zahlen a und b mit Hilfe des Fadens ihr arithmetisches Mittel zu finden. Wählt man für c den halben Maßstab, so erhält man die Summe.

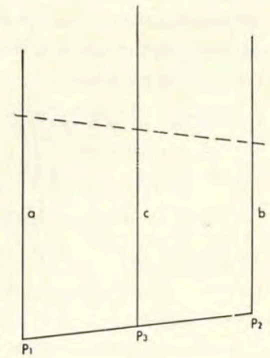


Bild 1

Nunmehr werden die Zahlen a, b, c als Logarithmen aufgefaßt und durch ihre Numeri x, y z ersetzt. Damit erhält man ein Nomogramm für die Beziehung $z = xy$ (Bild 2). Bei der praktischen Herstellung braucht man nur die Skala C oder D eines Rechenstabes auf die beiden Außenparallelen zu übertragen. Für die Mittelparallele nimmt man die Skala A oder B des Rechenstabes. Es versteht sich, daß das Nomogramm auch für die Division verwendet werden kann.

Beispiele: $2 \cdot 3 = 6$, $8 : 4 = 2$.

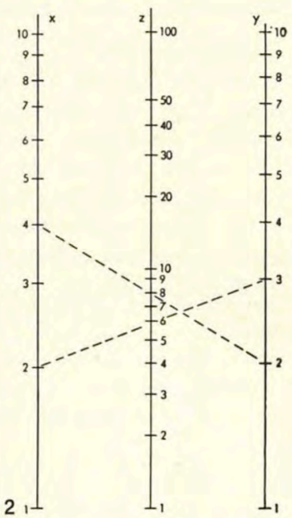


Bild 2

2. Beispiel aus dem Wetterdienst.

Auf einer 130 m über dem Meeresspiegel gelegenen Wetterwarte wird bei einer Temperatur von t^0 Celsius der Luftdruck p mm Quecksilber abgelesen. Der Druck ist auf den Meeresspiegel und 0^0 zu reduzieren.

Zu p ist das in mm Quecksilber umgerechnete Gewicht einer 130 m hohen Luftsäule vom Druck p und der Temperatur t zu addieren. Das spezifische Gewicht der Luft bei dem Druck 760 mm und 0^0 Celsius ist 0,001293. Das spezifische Gewicht des Quecksilbers ist 13,6. Also ist die Korrektur nach den Gesetzen von Boyle-Mariotte u. Gay-Lussac

$$\triangle p = \frac{0{,}001293 \cdot 13000 \cdot 273}{1{,}36 \cdot 760} \cdot \frac{p}{T} = (4{,}44\,p) \cdot \frac{1}{273+t}\,.$$

Es übernehmen $\triangle p$ die Rolle von z des ersten Beispiels, 4,44 p die Rolle von x und $\frac{1}{273+t}$ die Rolle von y (Bild 3). Die Skala für 4,44 p ist der Skala für p kongruent, nur um den Betrag log 4,444 verschoben. Die Skala für p wird unter Benutzung der Skala C oder D des Rechenstabes auf die linke Parallele gelegt. Auf der rechten Parallelen ist die Skala für $\frac{1}{T} = \frac{1}{273+t}$ abzutragen. Das bedeutet, daß die Werte für T in umgekehrter Richtung abgetragen werden müssen. Außerdem werden die Punkte $T = 273$, $T = 283$ usw. gleich mit $t = 0$, $t = 10$ usw. beziffert. Auch für diese Skala ist die Skala C oder D des Rechenstabes zu verwenden. Auch sie wird auf der rechten Parallelen in beliebiger Lage übertragen. Durch Rechnung stellen wir fest, daß für $p = 800$ und $t = 0$ die Korrektur den Wert 13 bekommt. Wir bestimmen den Schnittpunkt der Verbindung $p = 800$ und $t = 0$ mit der Mittelparallelen, und beziffern ihn mit $p = 13$. Unter Benutzung der Skala A oder B des Rechenstabes wird nun die Skala für $\triangle p$ auf der Mittelparallelen vervollständigt. So wird erreicht, daß die drei Punkte $4{,}44\,p = 1$, $\frac{273+t}{1} = 1$ und $\triangle p = 1$ auf einer Geraden liegen. Die Gerade selbst liegt außerhalb der Zeichnung, da für das gewählte Beispiel nur bestimmte Bereiche für p und t interessieren. Statt der Werte $p = 800$, $t = 0$, $p = 13$ hätte man natürlich auch jede andere zusammengehörige Wertegruppe benutzen können.

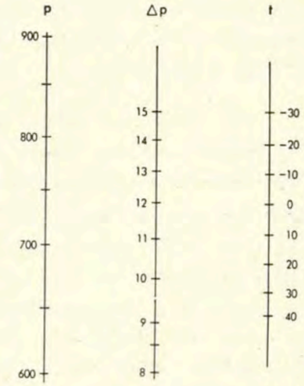


Bild 3

3. Die Zentralbeschleunigung der Kreisbewegung

$b = r \cdot \omega^2$. Hier ist auf der linken Parallelen die C-Skala eines Rechenstabes zu kopieren, das ergibt die Skala für r. Auf der rechten Parallelen ergibt sich die Skala für ω, indem man die C-Skala eines doppelt so langen Stabes kopiert. Man kann auch die C-Skala des ersten Stabes benutzen, muß aber dann alle Zahlen durch ihre Quadratwurzel ersetzen. Auf der Mittelparallelen wird die A-Skala des ersten Stabes kopiert (Bild 4).

Beispiel: Zu $r = 4$ und $\omega = 3$ gehört $b = 36$.

4. Beispiel aus der Raumfahrt.

Die Beziehung zwischen der Umlaufzeit T eines Satelliten und seiner Enfernung r vom Mittelpunkt des Zentralkörpers wird durch das dritte Keplersche Gesetz $r^3 : T^2 = \text{const}$ gegeben. Der Wert der Konstanten hängt außer vom Zentralkörper nur von den gewählten Maßeinheiten ab. Als Zentralkörper nehmen wir die Erde, als Maß für die Entfernung den Erdradius R und

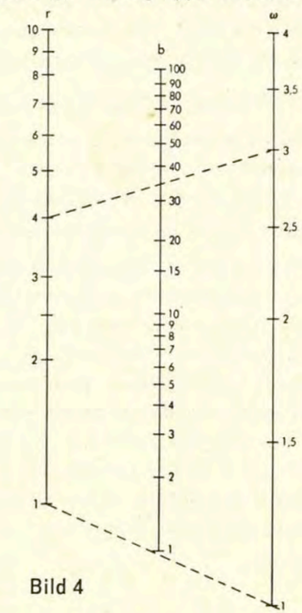


Bild 4

führen statt T die Anzahl N der Umläufe pro Tag ein. Beträgt die Entfernung n Erdradien, dann nimmt das Keplersche Gesetz die Form an.

$$n^3 \cdot N^2 = \text{const} \quad \text{oder auch} \quad n \cdot \sqrt[3]{N^2} = \text{const.}$$

Den Wert der Konstanten, die in der letzteren Form für alle Erdsatelliten gilt, findet man, indem man etwa die Daten des Mondes einsetzt. Die Entfernung r ist 60 R, die Umlaufzeit T = 27,322 Tage, also n = 60 und N = 1/27,322. Damit gilt

$$n \cdot \sqrt[3]{N^2} = 6{,}63.$$

Wir kopieren auf der linken Parallelen die A-Skala eines Rechenstabes. Das gibt unmittelbar die Skala für n. Der zweite Faktor $\sqrt[3]{N^2}$ ist gleich y zu setzen, also $N = \sqrt{y^3}$. Das bedeutet, daß die Skala für die Kubikzahlen auf der rechten Parallelen zu kopieren ist. Das ergibt dann die Skala für N. Wenn man sich auf die Erde als Zentralkörper beschränkt, braucht die Mittelparallele nicht beziffert zu werden. Es genügt, den Wert 6,63 abzutragen. Dies muß mit Hilfe der A-Skala eines Stabes von halber Länge geschehen. Man kann auch die A-Skala des ersten Stabes benutzen, muß dann aber den Wert $\sqrt{6{,}663}$ abtragen (Bild 5).

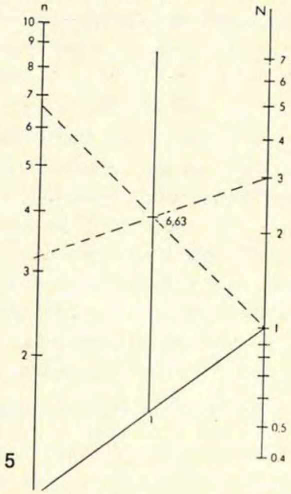


Bild 5

Beispiel: Ein Satellit, der die Erde täglich dreimal umkreist, muß eine Entfernung von 3,18 Erdradien vom Erdmittelpunkt haben. Ein Satellit, der die Erde täglich einmal von West nach Ost umkreist, würde für einen irdischen Beobachter scheinbar stillstehen. Seine Entfernung muß 6,63 Erdradien betragen.

5. Potenzen mit beliebiger Hochzahl

Alle Gesetze der Naturwissenschaft und Technik, in denen nur dritte und vierte Potenzen vorkommen, lassen sich nach den vorstehenden Beispielen als Muster nomographisch behandeln. Man kommt immer mit dem Kopieren von Skalen der Rechenstäbe aus. Anders wird es bei Potenzen mit beliebiger Hochzahl.

Man müßte in diesem Fall die Rechenschieberskalen in einem anderen Verhältnis als 1 : 2, 1 : 4, 2 : 3 usw. vergrößern oder verkleinern. Diese verhältnismäßig umständliche Arbeit läßt sich vermeiden, wenn man die Mittelparallele in geeigneter Weise zur Seite rückt. Hierfür gibt die folgende einfache geometrische Betrachtung den Schlüssel. Im Trapez (Bild 6) ist eine Parallele zu den Grundlinien gezogen und dadurch die Höhe in die Teile m und n zerlegt. Die Flächen der beiden Teiltrapeze ergeben zusammen die Fläche des ganzen Trapezes. In Formeln:

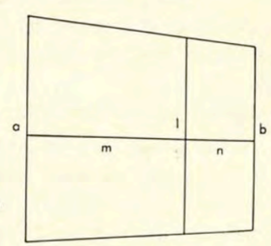


Bild 6

$$\frac{a+l}{2} \cdot m + \frac{b+l}{2} n = \frac{a+b}{2} (m+n), \text{ woraus } \quad l = \frac{an+bm}{m+n}.$$

Wie im Beispiel 1 fassen wir a, b, l als Logarithmen auf und ersetzen sie durch die Numeri x, y, z. Es entsteht $\quad z^{m+n} = x^n \cdot y^m.$

Aus dieser, sowie auch aus der vorigen Gleichung ergibt sich, daß es nur auf das Verhältnis von m : n ankommt. Eine Erweiterung oder Kürzung dieses Verhältnisses bedeutet nur eine Maßstabänderung der Zeichnung. Man kann daher ohne weiteres m + n gleich 1 annehmen. Man braucht nur eine der Skalen A oder C eines Stabes auf den drei Parallelen zu kopieren und hat damit ein Nomogramm für die Beziehung $z = x^n \cdot y^m$.

In Bild 7 ist die Poissonsche Gleichung für die adiabatische Ausdehnung oder Kompression eines Gases als Beispiel gewählt. Die Poissonsche Gleichung heißt

$$p^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{T}\right)^k = \text{const.}$$

k ist das Verhältnis der spezifischen Wärmen und hat für alle zweiatmigen Gase (also auch für Luft) den Wert 1,4. Den vorstehenden Ausführungen entsprechend sind in Bild 7 drei Parallele gezeichnet, die mittlere teilt den Abstand der beiden äußeren im Verhältnis k : (k—1) = 1,4 : 0,4 = 7 : 2. Auf der linken Geraden ist eine Rechenstabskala kopiert, auf der rechten Parallelen die gleiche Skala, aber in umgekehrter Reihenfolge und anders beziffert. Der Punkt T = 273, 373, usw. wird mit t = 0, 100 usw. beziffert. Die Zwischenparallele bleibt unbeziffert.

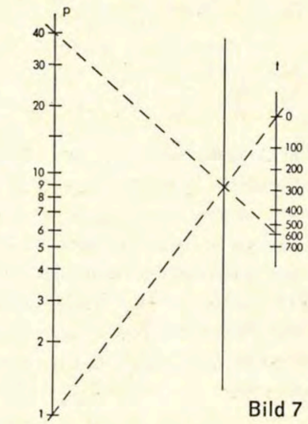


Bild 7

Frage: Wie heiß wird Luft von 1 Atm. Druck und 0° Celsius, wenn sie auf 40 Atm. komprimiert wird? Man verbindet p = 1 mit t = 0 und weiter den Schnittpunkt auf der Zwischenparallelen mit p = 40. Man findet t = 550° Celsius.

Es bedarf wohl kaum eines Hinweises, daß man den Rechenstab auch benutzen kann, um Nomogramme für solche Gesetze herzustellen, in denen Logarithmen und trigonometrische Funktionen vorkommen.

Die Lösung kubischer Gleichungen mit dem Rechenstab

von Dr.-Ing. E. Walloschke

Kubische Gleichungen, in denen das lineare Glied fehlt, lassen sich bekanntlich mit dem sehr schnell konvergierenden Näherungsverfahren nach Beier*) lösen. Ist diese in der allgemeinen Form **(1)** $x^3 + a_2 x^2 + a_0 = 0$,
dann erhält man eine ungefähre Lösung x_2 durch Gleichung

(2) $$x_2^2 = \frac{x_1^3 - 2a_0}{3x_1 + 2a_2}.$$

Darin bedeutet x_1 einen ersten, willkürlich angenommenen Wert als Lösung. x_2 ist der tatsächlichen Lösung näher als x_1. Im nächsten Schritt würde mit x_3 ein noch besserer Wert erhalten, wenn in Gleichung (2) der vorher errechnete Wert x_2 an Stelle von x_1 eingesetzt wird: **(3)** $$x_3^2 = \frac{x_2^3 - 2a_0}{3x_2 + 2a_2}$$

Derselbe Vorgang kann sich sinngemäß bei der Errechnung der vierten Näherung x_4 usf. wiederholen, doch wird erfahrungsgemäß schon mit x_3 eine ausreichend genaue Lösung erhalten, sofern der Schätzwert vernünftig lag.

Das gleichzeitige Auftreten verschiedener Potenzen von x, die ohne Neueinstellung auf den Skalen D, A, K des Rechenstabes abgelesen werden können, läßt den Rechenstab als besonders geeignetes Hilfsmittel bei diesem Verfahren erscheinen, zumal sich die Glieder $2\,a_0$ und $2\,a_2$ bei jedem Schritt wiederholen.

Beispiel: $x^3 - 47\,x^2 + 89 = 0$

Der Schätzwert $x_1 = 5$ ergibt $x_2^2 = \dfrac{125 - 178}{15 - 94} = \dfrac{-53}{-79} = (0{,}82)^2$

Der Quotient $\dfrac{53}{79}$ ist mittels A-B-Skala zu berechnen und auf D die Wurzel abzulesen.

Für den nächsten Schritt wird ohne Verstellung der Zunge x_2^3 auf der K-, $3\,x_2$ auf der D-Skala abgelesen. $x_2 = 0{,}82$

$$x_3^2 = \frac{0{,}55 - 178}{2{,}46 - 94} = \frac{-177{,}5}{-91{,}5} \qquad x_3 = 1{,}394$$

Letzter Schritt: $$x_4^2 = \frac{2{,}71 - 178}{4{,}18 - 94} = \frac{-175{,}3}{-89{,}8} \qquad x_4 = 1{,}396$$

Da x_4 von x_3 nur um 0,002 abweicht, ist die gesuchte Lösung mit praktisch ausreichender Genauigkeit gefunden.

Besitzt die kubische Gleichung jedoch ein lineares Glied, dann ist dieses Verfahren zunächst nicht anwendbar. Sie läßt sich aber durch Reduktion in die gewünschte Form bringen.

(4) $y^3 + b_2 y^2 + b_1 y + b_0 = x^3 + a_2 x^2 + a_0$.

Mit dem Ansatz

(5) $x = y + u$ bekommt man nach Potenzieren

(5a) $a_2 x^2 = a_2 y^2 + 2\,a_2 y u + a_2 u^2$

(5b) $x^3 = y^3 + 3\,y^2 u + 3\,y u^2 + u^3$ **(5c)** $a_0 = a_0$

(6) $x^3 + a_2 x^2 + a_0 = y^3 + y^2\,(3\,u + a_2) + y\,(3\,u^2 + 2\,a_2 u) + u^3 + a_2 u^2 + a_0$

Gleichung 6 ist durch Summierung der Gleichungen 5a bis 5c entstanden. Der Koeffizientenvergleich der Gleichungen 4 und 6 führt zu

*) Rohrberg, Mathematik Bd. 1, Fachverlag Schiele & Schön, Berlin 1958

(7) $b_2 = 3\,u + a_2$ **(8)** $b_1 = 3\,u^2 + 2\,a_2 u$ **(9)** $b_0 = u^3 + a_2 u^2 + a_0$

Daraus erhält man die für die Reduktion erforderlichen Beziehungen:

(5) $x = y + u$ **(7a)** $u = \frac{1}{3}(b_2 - a_2)$

(7b) $a_2 = \pm\sqrt{b_2^2 - 3\,b_1}$ **(7c)** $b_2^2 > 3\,b_1$

(9a) $a_0 = b_0 - \frac{1}{3}u^2\,(b_2 + 2\,a_2)$

Beispiel: $y^3 - 2\,y^2 + 1\,y + 3 = 0$

Nach **(7b)**: $a_2 = \pm\sqrt{2^2 - 3} = \pm 1$, gewählt $a_2 = +1$.

(7a): $u = \frac{1}{3}(-2 - 1) = -1$

(9a): $a_0 = 3 - \frac{1}{3}(-2 + 2) = 3.$

Reduzierte Gleichung: $x^3 + 1\,x^2 + 3 = 0$

Lösung: $x_1 = -2$

$$x_2^2 = \frac{-8 - 6}{-6 + 2} = \frac{-14}{-4} \qquad x_2 = -1{,}87$$ (Vorzeichen der Wurzel richtet sich nach x_1).

$$x_3^2 = \frac{-6{,}56 - 6}{-5{,}61 + 2} = \frac{-12{,}56}{-3{,}61} \qquad x_3 = -1{,}865$$

Mit Gleichung 5 kommt man über $y_3 = x_3 - u = -0{,}865$ auf die gesuchte Lösung.

Ist mit $b_2^2 < 3\,b_1$ die Gleichung 7c nicht erfüllt, so hat die zugehörige Funktion keine Extremwerte. Setzt man nämlich die erste Ableitung von Gleichung 4, $3\,y^2 + 2\,b_2\,y + b_1 = 0$, gleich Null, so erhält man für den Ort der Extremwerte $y_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{b_2^2 - 3b_1}$ ebenfalls eine imaginäre Wurzel. Bei solchen weniger stark gekrümmten Parabeln kann die Reduktion meist mit folgendem Ansatz durchgeführt werden:

(10) $x = \dfrac{1}{y} + u,\quad y = \dfrac{1}{x - u}$ **(11)** $u = \dfrac{b_1 - a_2 b_0}{3\,b_0}$

(12) $a_2 = \mp \dfrac{1}{b_0}\sqrt{b_1^2 - 3\,b_0 b_2}$ **(12a)** $b_1^2 > 3\,b_0 b_2$

(12b) $a_0 = \dfrac{1}{b_0} - \dfrac{1}{3}u^2\left(\dfrac{b_1}{b_0} + 2\,a_2\right)$

Beispiel: $y^3 + 2\,y^2 + 3\,y + 0{,}3 = 0.$

Hier ist Gleichung 12a mit $9 > 3 \cdot 0{,}3 \cdot 2$ erfüllt, Gleichung 7c dagegen nicht. Mit Gleichung 12 erhält man

$$a_2 = \frac{10}{3}\sqrt{9 - 1{,}8} = 8{,}94 \qquad u = \frac{3 - 8{,}94 \cdot 0{,}3}{3 \cdot 0{,}3} = 0{,}353$$

$$a_0 = \frac{10}{3} - \frac{0{,}353^2}{3}(10 + 2 \cdot 8{,}94) = 2{,}17$$

Reduzierte Gleichung: $x^3 + 8{,}94\,x^2 + 2{,}17 = 0$

Lösung: $x_1 = -10$

$$x_2^2 = \frac{-1000 - 4{,}34}{-30 + 17{,}88} = \frac{-1004{,}3}{-12{,}12}, \qquad x_2 = -9{,}11$$

$$x_3^2 = \frac{-756 - 4{,}34}{-27{,}33 + 17{,}88} = \frac{-760{,}3}{-9{,}45}, \qquad x_3 = -8{,}97$$

Mit Gleichung 10 erhält man die gesuchte Lösung

$$y_3 = \frac{1}{x_3 - u} = \frac{-1}{8{,}97 + 0{,}353} = -0{,}1072$$

Mit den hier abgeleiteten Reduktionsformeln 5, 7, 9a bzw. 10, 11 und 12 wird das Näherungsverfahren von Beier allgemein zur Lösung kubischer Gleichungen anwendbar, dessen zusätzlicher Vorteil darin besteht, daß Rechenfehler selbständig korrigiert werden.

Einige Anwendungen des Castell-Duplex in der Fernmeldetechnik

von Dipl.-Ing. Ferdinand Müller

1. Rechnen mit Dämpfungsmaßen

In der Fernmeldetechnik und in der technischen Akustik wird zur Angabe von Größenverhältnissen, z. B. Dämpfungen, Verstärkungen, Lautstärken, vielfach das logarithmische Maß verwendet. Für die hierzu speziell eingeführten „Einheiten" N e p e r (Np) und D e z i b e l (dB) gibt es zwei Grunddefinitionen:

1.1 Unter Verwendung des n a t ü r l i c h e n Logarithmus des Verhältnisses zweier Spannungen U: $a\ [\mathrm{Np}] = \ln \frac{U_1}{U_2}$.

1.2 Unter Verwendung des d e k a d i s c h e n Logarithmus des Verhältnisses zweier Leistungen P: $b\ [\mathrm{dB}] = 10 \lg \frac{P_1}{P_2}$.

Zum Rechnen mit diesen logarithmischen Maßen sind die 6 Loglog-Skalen des Castell-Duplex-Rechenstabes besonders geeignet. [1]

Im folgenden sind zunächst die „Rezepte" für die Rechenvorgänge unter Verwendung dieser „Dämpfungsmaße" zusammengestellt, und anschließend einige Anwendungsbeispiele aus der Praxis gegeben. [2]

Bei den angeführten Beziehungen steht die „Spannung" (U) nur als Beispiel; Verhältnisbeziehungen zwischen anderen Größen, wie Stromstärken, Schalldrucken, Feldstärken usw., sind in gleicher Weise zu behandeln. Auch bei den Leistungsverhältnissen gelten die angegebenen Beziehungen sowohl für elektrische Leistungen (bei konstantem Widerstand) als auch für z. B. Strahlungsleistungen im elektromagnetischen Feld oder im Schallfeld.

2. Gegeben: Größenverhältnis; gesucht: Dämpfungsmaß

2.1 Im natürlichen Logarithmensystem: **Np**

2.11 Spannungsverhältnis in Neper: $a = \ln \frac{U_1}{U_2}$

Rechnung wie für natürliche Logarithmen:

U_1/U_2 mit Läuferstrich auf LL-Skala einstellen;

auf C-Skala der in Nullstellung befindlichen Zunge (oder auf D-Skala bei Wenden des Stabes) a ablesen.

Beispiel: LL_3: $U_1/U_2 = 5$;
C: $a = 1{,}61$ Np.

Beispiel für $U_1/U_2 < 1$ (ergibt $a < 0$):
LL_{02}: $U_1/U_2 = 0{,}5$;
C: $a = -0{,}693$ Np.

1) Siehe auch *F. Heywang*, Anwendung der Log-log-Skalen beim Rechenstab Castell-Duplex Nr. 2/82, in Rechenstab-Brief Nr. 1/1961 S. 9 ... 13.

2) Dem Text ist die neuere Ausführung des Rechenstabes Duplex 2/82 zugrundegelegt, bei der die Rückseite der Zunge eine C-Skala enthält — ebenso wie bei Novo-Duplex 2/83. Die ältere Ausführung 2/82 ist, wie auch der Stab 62/82, in gleicher Weise anzuwenden, wenn man die C-Skala der Vorderseite in Verbindung mit dem zweiseitigen Läufer benutzt.

Die Größenordnung bzw. Stellung des Kommas ist, wie bei jeder Rechenstab-Anwendung, gesondert zu überlegen; in diesem Falle ist einfach zu berücksichtigen, daß $\ln e = \ln 2{,}7\ldots = 1$ bzw. $\ln \frac{1}{e} = -1$ usw.; siehe auch Abschnitt 5.1.

2.12 Leistungsverhältnis in Neper: $a = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2}$

Zur Berücksichtigung des Faktors $\frac{1}{2}$ ist die Zunge so einzustellen, daß C 1 über D 2 steht; um auf der Rückseite des Stabes zu bleiben, wo sich die LL-Skalen befinden, stellt man dementsprechend: CF 1 über DF 2. Falls man beim Rechnen den linken Teil der LL-Skalen benutzen muß, ist die Zunge durchzuschieben auf C 10 über D 2 bzw. CF 2 über DF 4. Dann weiter analog 2.11:

P_1/P_2 mit Läuferstrich auf LL-Skala einstellen; auf C-Skala a ablesen.

Beispiele: LL_3: $P_1/P_2 = 25$; LL_{03}: $P_1/P_2 = 0{,}25$;
C: $a = 1{,}61$ Np. C: $a = -0{,}693$ Np.

2.2 Im dekadischen Logarithmensystem: **dB**

2.21 Leistungsverhältnis in Dezibel: $b = 10 \lg \frac{P_1}{P_2}$

Rechnung wie für dekadische Logarithmen:

Läuferstrich auf $LL_3\,10 = LL_{03}\,0{,}1$;

Zunge mit C 1 (oder auch C 10 je nach Lage des Arbeitsbereiches [3]) unter Läuferstrich;

P_1/P_2 mit Läuferstrich auf LL-Skala einstellen;
auf C-Skala [3] b ablesen.

Die Kommaüberlegung ist hierbei besonders einfach, da ja zu $P_1/P_2 = 10$ der Wert $b = 10$ dB gehört (vgl. 5.1).

Beispiele: LL_3: $P_1/P_2 = 25$; LL_{03}: $P_1/P_2 = 0{,}25$;
C: $b = 14$ dB [4] C: $b = -6{,}02$ dB.

2.22 Spannungsverhältnis in Dezibel: $b = 20 \lg \frac{U_1}{U_2}$

Rechnung wie unter 2.21, jedoch:

Zunge mit C 2 (bzw. CF 2 [5]) über $LL_3\,10$.

Beispiele: LL_3: $U_1/U_2 = 5$; LL_{02}: $U_1/U_2 = 0{,}5$;
C: $b = 14$ dB. C: $b = -6$ dB. [4]

3) An Stelle der C-Skala kann man auch die CF-Skala benutzen (d. h. CF 1 über $LL_3\,10$), was hierbei e'nen breiteren Einstellbereich auf LL ergibt.

4) Genauer: 13,98 dB; solche Genauigkeiten sind jedoch bei diesen Rechnungen unüblich und auch wenig sinnvoll, da in der Praxis die der Rechnung zugrundeliegenden Meßwerte meist weit ungenauer sind; so ist es üblich, für $P_1/P_2 = 4$ grundsätzlich $b = 6$ dB anzusetzen an Stelle des genaueren Wertes 6,021 dB (gilt auch für 2.22 bei $U_1/U_2 = 2$ usw., vgl. auch Abschnitt 5.1). Der Fehler von 0,02 dB $\approx$ 2 ‰ liegt gerade eben über der Ablesegenauigkeit des 25-cm-Rechenstabes.

5) Hierbei ergibt die Verwendung der C-Skala den breiteren LL-Bereich; benutzt man die C-Skala der Stabvorderseite mit, so erhält man durch deren Überteilung < 1 sogar eine vollständige Überdeckung der LL-Skalen.

3. Gegeben: Dämpfungsmaß; gesucht: Größenverhältnis

Die in Abschnitt 2 gegebenen Rechenvorschriften sind sinngemäß anzuwenden, d. h. Zunge so einstellen, wie es dem in Rechnung stehenden Maßsystem entspricht, dann a bzw. b mit Läuferstrich auf C-Skala einstellen und U_1/U_2 bzw. P_1/P_2 auf LL-Skala ablesen.

Beispiele:

Np

3.1 Zu 2.1: $\frac{U_1}{U_2} = e^a$; $\frac{P_1}{P_2} = e^{2a}$

3.11 Nach 2.11: Zunge in Nullstellung;
C: $a = 1$ Np; LL_2 oder LL_3: $U_1/U_2 = 2{,}72$ (= e).

3.12 Nach 2.12: Zunge CF 1 über DF 2;
C: $a = 1$ Np; LL_3: $P_1/P_2 = 7{,}39$ (= e^2).

dB

3.2 Zu 2.2: $\frac{P_1}{P_2} = 10^{\frac{b}{10}}$; $\frac{U_1}{U_2} = 10^{\frac{b}{20}}$

3.21 Nach 2.21: Zunge C 1 über LL_3 10;
C: $b = -30$ dB; LL_{03}: $P_1/P_2 = 10^{-3}$.

3.22 Nach 2.22: Zunge C 2 über LL_3 10;
C: $b = -30$ dB; LL_{03}: $U_1/U_2 = 0{,}0316$.

4. „Absolute" Pegel

Die logarithmischen Maßzahlen Neper und Dezibel sind zwar ursprünglich reine Verhältnismaße. Setzt man jedoch im Nenner der Verhältnis-Angaben einen bestimmten Bezugswert (U_0, P_0), so kann man die Logarithmen auch als „Absolutwert"-Angaben auffassen. Man spricht dann von „Pegel": Spannungspegel, Leistungspegel, Schalldruckpegel usw.

In der Fernmeldetechnik hat es sich eingebürgert, als Bezugspegel die Größe

$P_0 = 1$ Milliwatt an 600 Ohm

zu benutzen; dem entspricht eine Bezugsspannung von

$$U_0 = \sqrt{P_0\,[\mathrm{W}] \cdot R_0\,[\Omega]} = \sqrt{0{,}6\,[\mathrm{V}]^2} = 0{,}775 \text{ Volt.}$$

Zur Unterscheidung solcher Pegelangaben von reinen Relativwerten schreibt man dann mit

Npm = Pegel in Neper [6] }
dBm = Pegel in Dezibel [7] } bezogen auf U_0 bzw. P_0:

$$p\,[\mathrm{Npm}] = \ln \frac{U}{U_0} = \frac{1}{2} \ln \frac{P}{P_0};$$

$$p\,[\mathrm{dBm}] = 20 \lg \frac{U}{U_0} = 10 \lg \frac{P}{P_0}.$$

Andere Bezugswerte sind z. B.:

Für elektrische Feldstärken: $E_0 = 1$ μV/m;
„Feldstärkemaß" F dann in „dB über 1 μV/m".

Für den Schalldruck: $p_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ μbar;
„Lautstärke" Λ dann in „dB über Hörschwelle" = „phon"
allerdings nur mit Bezug auf p_0 bei der Frequenz 1000 Hz.

---

6) Npm nicht zu verwechseln mit mNp = Millineper.

7) Mitunter werden auch andere Bezugsleistungen verwandt; z. B.
dBw = dB bezogen auf 1 Watt;
dBp = dB bezogen auf 1 Picowatt = 10^{-12} Watt.

4.1 Enthält der Bezugswert die Maßzahl 1 ($P_0 = 1$ mW, $E_0 = 1$ μV/m), so verfährt man genau nach den Rechenvorschriften der Abschnitte 2 und 3, spart dabei die Verhältnis-Bildung und hat nur darauf zu achten, daß die Größenangabe des Zählers ($P_1 = P$) in der gleichen Einheit eingesetzt wird, wie der Bezugswert $P_2 = P_0$).
Beispiele:

4.11 Gegeben: $P = 50$ mW; gesucht: Leistungspegel über 1 mW:

Npm

Nach 2.12: $p = \frac{1}{2} \ln \frac{P}{P_0} = \frac{1}{2} \ln 50 = 1{,}96$ Npm.

dBm

Nach 2.21: $p = 10 \lg \frac{P}{P_0} = 10 \lg 50 = 17$ dBm.

4.12 Gegeben: $p = -9$ dBm; gesucht: Leistung P:

Nach 3.21: $\frac{P}{P_0} = 10^{p/10}$; Zunge CF 1 über LL_3 10;
CF-Skala: 9; LL_{03}-Skala: $P = 0{,}126$ mW.

4.2 Ist die Maßzahl des Bezugswertes von 1 verschieden (z. B. $U_0 = 0{,}775$ V, siehe oben), so kann man für Einzelrechnung zunächst das Verhältnis U/U_0 durch einfache Division (D - C - D) ausrechnen und dann nach 2.11 bzw. 2.22 weiterrechnen. Für laufende Rechnung (Tabellierung) ist es jedoch u. U. zweckmäßiger, die Zunge nur einmal nach der jeweiligen Rechenvorschrift des Abschnittes 2 einzustellen, mit $U_1/U_2 = U/1$ V zu rechnen und den Logarithmus des Bezugswertes U_0 dem Ergebnis additiv hinzuzufügen.

4.21 Für den Fall „absoluter Spannungspegel in dBm" führt das zu folgendem:

dBm

$$p\,[\mathrm{dBm}] = 20 \lg \frac{U}{U_0} = p_1 + p_0 = 20 \lg \frac{U}{1} + 20 \lg \frac{U_1}{U_0}$$

mit $U_1 = 1$ [V], $U_0 = 0{,}775$ [V]; daraus:

$$p_0 = 20 \lg U_1/U_0 = 20 \lg \frac{1}{0{,}775} = +\,\mathbf{2{,}214\ dB.}$$

Dieser Wert ist dann zu dem nach 2.22 ermittelten Wert von $p_1 = 20 \lg U$ zu addieren.

Beispiele:

Gegeben: $U = 2$ V; gesucht: p [dBm]:

Nach 2.22: Zunge C 2 über LL_3 10;
LL_2: $U/U_1 = 2$;
C: $p_1 = +\,6{,}02$ dB
+ $p_0 = +\,2{,}214$ dB

$p = +\,8{,}23$ dBm.

Gegeben: $p = +\,10$ dBm; gesucht: U [V]:

$p_1 = p - p_0 = (10 - 2{,}214)$ dB $= +\,7{,}786$ dB;

nach 3.22: C: $p_1 = 7{,}79$;
LL_2: $U = 2{,}45$ V.

Wer die Addition bzw. Subtraktion scheut und bei einer Tabellierung z. B. den Wert $U = \frac{U}{U_0} \cdot U_0$ mit Hilfe eines Rechenstabes, dessen Zunge fest auf D/C = 1/0,775 eingestellt ist, ermitteln will, kann für das letztere Beispiel auch so rechnen:

$$p = 20 \lg \frac{U}{U_0} = 10 \text{ dB};$$

$U/U_0 = 3{,}16$;

$$U = \frac{U}{U_0} \cdot U_0 = 3{,}16 \cdot 0{,}775\ \mathrm{V} = 2{,}45\ \mathrm{V}$$

(siehe auch Beispiele 6.4).

4.22 Für den Fall „absoluter Spannungspegel in Npm" ergibt sich analog zu 4.21:

$$p\ [\mathrm{Npm}] = \ln \frac{U}{U_0} = p_1 + a_0 = \ln \frac{U}{U_1} + \ln \frac{U_1}{U_2} \qquad \boxed{\text{Npm}}$$

$$\text{mit } a_0 = \ln \frac{U_1}{U_0} = \ln \frac{1}{0{,}775} = \mathbf{+\ 0{,}255\ Np.}$$

Beispiel: Gegeben: $U = 2$ V; gesucht: p [Npm]:

Nach 2.11: Zunge in Nullstellung;

LL_2: $U/U_1 = 2$;

C: $p_1 = 0{,}693$ Np

$+$ $a_0 = 0{,}255$ Np

$p = +\ 0{,}948$ Npm.

5. Größenordnungen und Umrechnungen

5.1 Wie oben erwähnt, bedarf die Größenordnung bzw. Kommastellung, wie bei jeder Rechenstabverwendung, auch hier einer Vorüberlegung. Sie ist beim Rechnen mit „Dezibel" genau so einfach, wie die Ermittlung der „Kennziffer" bei der Benutzung der Logarithmentafel. Beim Rechnen mit „Neper" kann man auf die Beschriftung der LL-Skalen (e^x; $e^{0,1x}$ usw.) zurückgreifen. Nachstehende Tafel gibt einen Überblick zur schnellen Orientierung:

Spannungsverhältnis U_1/U_2	1	$e = 2{,}72$	3,16	10	100	1000	$10n$	
Leistungsverhältnis P_1/P_2	1	$e^2 = 7{,}39$	10	100	10^4	10^6	10^{2n}	
$a = \ln \frac{U_1}{U_2} = {}^1\!/_2 \ln \frac{P_1}{P_2}$	0	1	1,15	2,30	4,61	6,91	$2{,}3n$	Np
$b = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 10 \lg \frac{P_1}{P_2}$	0	8,69	10	20	40	60	$20n$	dB

Wer häufiger mit den Dezibel-Maßen zu tun hat, dem sind noch die folgenden gerundeten Werte geläufig (vgl. Fußnote 4):

U_1/U_2		2			4		5			8	usw.
P_1/P_2	2	4	5	8	16	20	25	32	40	50	64	
b	3	6	7	9	12	13	14	15	16	17	18	dB

5.2 Der Vollständigkeit halber sei noch die durch einfache Multiplikation auszuführende Umrechnung von Neper in Dezibel und umgekehrt angeführt:

$$1\ \mathrm{Np} = 8{,}686\ \mathrm{dB}\ (= 20 \lg e);$$

$$1\ \mathrm{dB} = 0{,}1151\ \mathrm{Np}\ \left(= \frac{1}{20} \ln 10\right) = 115\ \mathrm{mNp}.$$

Für die verschiedenen Leistungs-Bezugspegel (vgl. Fußnote 7) gilt:

dBw = dBm — 30 dB.

6. Einige praktische Beispiele

6.1 An einem Verstärker mit dem Eingangswiderstand $R_e = 10\ \mathrm{k}\Omega$ liegt eine Eingangsspannung von $U_e = 50$ mV; der Ausgang ist mit einem Widerstand $R_a = 600\ \Omega$ abgeschlossen, an dem eine Spannung von $U_a = 1{,}55$ V gemessen wird ($p_a = +\ 6$ dBm).

Wie groß ist die Spannungs- und die Leistungs-Verstärkung?

Spannungsverhältnis $U_a/U_e = \frac{1{,}55}{0{,}05} = 31$;

$$v_U\ [\mathrm{dB}] = 20 \lg \frac{U_a}{U_e};$$

nach 2.22: Zunge C 2 über LL_3 10;

LL_3 31; ergibt auf C: $v_u = 29{,}8$ dB;

dies ist die Spannungsverstärkung. Die Leistungsverstärkung ist jedoch größer, da $R_a < R_e$; man erhält sie aus folgender Überlegung:

$$P_e = \frac{U_e^2}{R_e}; \qquad P_a = \frac{U_a^2}{R_a}; \qquad \frac{P_a}{P_e} = \frac{U_a^2}{U_e^2} \cdot \frac{R_e}{R_a};$$

$$v_p\ [\mathrm{dB}] = 10 \lg \frac{P_a}{P_e} = 10 \lg \frac{U_a^2}{U_e^2} + 10 \lg \frac{R_e}{R_a} =$$

$$= 20 \lg \frac{U_a}{U_e} + 10 \lg \frac{R_e}{R_a} = v_U + v_R$$

mit $\frac{R_e}{R_a} = \frac{10000}{600} = 16{,}67$;

nach 2.21: Zunge CF 1 über LL_3 10;

LL_3 16,7; ergibt auf CF: $v_R = 12{,}2$ dB;

hieraus: $v_p = v_U + v_R = 42$ dB.

6.2 Ein Sender liefert an eine Antenne mit dem Gewinn $G_a = 16$ dB eine Leistung $P_S = 10$ kW über ein HF-Kabel mit einer Dämpfung von $a_K = 2{,}5$ dB. Wie groß ist die in Hauptstrahlrichtung abgegebene aequivalente Strahlungsleistung „*ERP*"?

Effektiver Gewinn: $G = G_a - a_K = 13{,}5$ dB;

$$ERP = P_S \cdot 10^{G/10}$$

nach 3.21: Zunge CF 1 über LL_3 10;

CF 1,35; ergibt auf LL_3: $\frac{ERP}{P_S} = 22{,}4$

und mit $P_S = 10$ kW: $ERP = 224$ kW.

6.3 Ein in dBm geeichter Tonfrequenz-Spannungsmesser zeigt $p = +\ 26$ dBm an. Wie groß ist die Spannung in Volt?

Hier lohnt es sich nicht, den Rechenstab zu bemühen, denn: $p = +\ 26$ dBm bedeutet: Die Spannung beträgt das 20fache der Bezugsspannung $U_0 = 0{,}775$ V (vgl. Abschnitte 4 und 5.1), also: $U = 20\ U_0 = 15{,}5$ V.

6.4 Ein Übertragungsweg wird (bei Einspeisung mit U_e = const) mit einem in Volt geeichten Spannungsmesser (z. B. in Abhängigkeit von der Frequenz) durchgemessen; die Werte der Ausgangsspannung U_a [V] sind tabelliert und sollen in Pegelwerte p_p [dBm] umgerechnet werden. Die Tabelle der Spannungswerte (siehe unten, Zeile (1)) zeigt, daß diese im wesentlichen um 3 Volt herum liegen.

Man kann hier entweder nach dem unter 4.21 angegebenen Rezept verfahren, d. h. die Werte $p_1 = 20 \lg U_a$ nach 2.22 ermitteln und jeweils $p_0 = 2{,}214$ dB addieren (Tabelle Zeilen (2) und (3)), oder aber folgendes Verfahren anwenden:

Für $U_2 = 3{,}1$ V ($= 4\ U_0$) ist $p_2 = +\ 12{,}04$ dBm (vgl. Fußnote 4); man schiebt mittels der Skalen C/D, ggf. unter Mitbenutzung von CF/DF, das Verhältnis U_a/U_2 aus (C 3,1 über D 1), notiert dieses in Zeile (4) der Tabelle, errechnet dann nach

2.22 den Wert $p_3 = 20 \lg \frac{U_a}{U_2}$ (Zeile (5)) und erhält $p_a = p_3 + p_2$ durch Addition von $p_2 = +\,12{,}04$ dBm (Zeile (6)). Diese Rechnung ist einerseits recht genau, andererseits sehr einfach durchzuführen.

(1) U_a gemessen	2,75	2,98	3,10	3,15	3,00	1,58	V
(2) $p_1 = 20 \lg U_a$	8,79	9,48	9,83	9,97	9,54	3,97	dB
(3) $p_a = p_1 + p_0$	11,00	11,69	12,04	12,18	11,75	6,18	dBm
(4) U_a / U_2	0,887	0,961	1,000	1,016	0,968	0,510	
(5) $p_3 = 20 \lg \frac{U_a}{U_2}$	—1,04	—0,35	0	+0,14	—0,28	—5,85	dB
(6) $p_a = p_3 + p_2$	11,00	11,69	12,04	12,18	11,76	6,19	dBm

(Der Additionsvorgang $p_3 + p_2$ vereinfacht sich noch, wenn man U_2 so wählt, daß man statt $p_2 = 12{,}04$ die runde Zahl $p_2' = 12{,}00$ dBm erhält; das ist der Fall für $U_2' = 3{,}084$ V statt 3,1 V.)

6.5 In einer Übersicht über die Feldstärkeverteilung in einem Empfangsgebiet ist für einen bestimmten Ort angegeben: Feldstärkemaß $F = 73$ dB über 1 µV/m. Wie groß ist die Feldstärke E in mV/m?

Nach 4.1 und 3.22: Zunge C 2 über LL_3 10;
C 73; ergibt auf LL_3: $E = 4{,}5 \cdot 10^3$ µV/m.
Oder: 73 dB = 60 dB (Übergang von µV/m auf mV/m) + 13 dB;
C 13; ergibt auf LL_3: $E = 4{,}45$ mV/m.

6.6 Die Empfindlichkeit eines Meßmikrofons ist angegeben zu $E_M = 5$ mV/µbar; es soll der Spannungsbereich ermittelt werden, den der Mikrofon-Verstärker verarbeiten muß, wenn der gesamte Hörbereich erfaßt werden soll (Linearität vorausgesetzt).

Mikrofonspannung: $U_M = E_M \cdot p$;
Schalldruck an der Hörschwelle: $p_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ µbar,
$U_{Mo} = E_M \cdot p_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ mV;
Schallpegelbereich bis zur Schmerzschwelle (1000 Hz):
0 ... 130 phon = 0 ... 130 dB über p_0;
nach 3.22: $p_{max}/p_0 = U_{Mmax}/U_{Mo} = 10^{130/20} = 10^{6,5} = 3{,}16 \cdot 10^6$;
daraus: $U_{Mmax} = U_{Mo} \cdot 3{,}16 \cdot 10^6$;
also Spannungsbereich: $U_M = 1$ µV ... 3,16 V.

6.7 Am Eingang eines Fernsehempfängers wird auf dem zu empfangenden Kanal (bei abgeschaltetem Nutzsender) eine Störspannung von 30 µV gemessen. Auf welchen Wert muß die Eingangsspannung bei Empfang des Nutzsenders mindestens gebracht werden, um den für ein gutes Bild zu fordernden Störabstand von 46 dB zu erreichen?

Auch hier kann man auf den Einsatz des Rechenstabes verzichten, denn (vgl. 5.1): 46 dB entsprechen einem Spannungsverhältnis von 1 : 200; also $U_{Nutz} \geqq 200 \cdot U_{Stör} = 6$ mV.

6.8 Der Klirrfaktor eines Verstärkers wird zu $k = 1{,}6\,\%$ gemessen.
Wie groß ist die „Klirrdämpfung" a_k ?

$a\ [\text{dB}] = 20 \lg \frac{100}{k\%} = -\,20 \lg 0{,}016;$

nach 2.22: Zunge C 2 über LL_3 10;
LL_{03} 0,016; ergibt auf C: $a_k = 36$ dB.

6.9 In einer Veröffentlichung über die amerikanische Venus-Sonde „Mariner 2"[8] finden sich über die Kommando-Übertragung auf 890 MHz von der Bodenstation in Goldstone (USA) zum Bordempfänger der Sonde in Venusnähe folgende Daten:

Senderleistung:	$P_S = 10{,}0$ kW
Gewinn der Sendeantenne:	$G_S = 45{,}0$ dB
Übertragungsdämpfung über $60 \cdot 10^6$ km:	$a_d = 246{,}9$ dB
Gewinn der Empfangsantenne:	$G_E = 3{,}3$ dB

Wie groß ist die an der Empfangsantenne zur Verfügung stehende UHF-Leistung P_E?

Gesamtdämpfung: $a = 10 \lg \frac{P_S}{P_E} = a_d - G_S - G_E = 198{,}6$ dB.

Für 200 dB ist das Leistungsverhältnis 10^{20}, also die Leistung $P_S \cdot 10^{-20} = 10^{-16}$ W; die rechnerische Differenz von 1,4 dB ergibt nach 3.21 noch den Faktor 1,38, so daß man erhält: $P_E = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ Watt (eine Größenordnung, die etwa der Reizschwelle der menschlichen Sinnesorgane entspricht).

An gleicher Stelle[8] finden sich noch folgende Angaben:

Verluste in der Empfangsanlage:	$a_e = 1{,}3$ dB
Rauschtemperatur des Empfangssystems:	$T_e = 7300$ °K
Empfänger-Bandbreite:	$b_e = 20$ Hz

Hiernach kann man die Frage stellen: Wie groß ist der empfangsseitige Rauschabstand (Nutz/Stör-Verhältnis) a_r ?

Rauschleistung (mit $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Ws/°K = Boltzmann-Konstante):
$P_r = k \cdot T_e \cdot b_e = 2 \cdot 10^{-18}$ W;

$$a_r = 10 \lg \frac{P_E}{P_r} - a_e = 10 \lg \frac{1{,}38 \cdot 10^{-16}}{2 \cdot 10^{-18}} - 1{,}3 \text{ dB}$$
$$= 10 \lg 69 - 1{,}3 \text{ dB};$$

nach 2.21: $a_r = 18{,}4$ dB — 1,3 dB = 17,1 dB.

8) *J. Holahan*, Deep-space communications comes into its own with Mariner 2 link. Space/Aeronautics 38 Nr. 7 (Dec. 1962) S. 66.